3.11. Растављање полинома на чиниоце

Ако се чланови бинома $A + B$ могу раставити на чиниоце, на пример,

$$A = P \cdot M \quad \text{и} \quad B = Q \cdot M$$

где су P, Q, M мономи, онда се тај бином може раставити на чиниоце:

$$A + B = P \cdot M + Q \cdot M$$

$$= (P + Q) \cdot M \text{ (дистрибутивност множења према сабирању)}$$

Чиниоци бинома $A + B$ су $P + Q$ и M.

Пример 1

1) $2x^2 + 3x = 2x \cdot x + 3 \cdot x$

$= (2x + 3) \cdot x$;

2) $6ab^2 - 9ab^3 = 2 \cdot 3ab^2 - 3b \cdot 3ab^2$

$= (2 - 3b) \cdot 3ab^2$;

3) $-12x^3y^2z + 8xyz = (-3x^2y) \cdot 4xyz + 2 \cdot 4xyz$

$= (-3x^2y + 2) \cdot 4xyz$.

Ако се чланови бинома $P - Q$ могу записати као квадрати неког монома A, односно B, тј. ако је $P = A^2$ и $Q = B^2$, онда је тај бином разлика квадрата и може се раставити на чиниоце.

$$P - Q = A^2 - B^2 \qquad \text{(разлика квадрата)}$$

$$= (A - B) \cdot (A + B).$$

Чиниоци разлике квадрата $A^2 - B^2$ су $A - B$ и $A + B$.

Пример 2

1) $4x^2 - 9y^2 = 2^2x^2 - 3^2y^2$

$= (2x)^2 - (3y)^2$

$= (2x - 3y) \cdot (2x + 3y)$;

2) $25a^2 - 1 = (5a)^2 - 1^2$

$= (5a - 1) \cdot (5a + 1)$;

3) $16a^4x^2 - 25b^2y^4 = (4a^2x)^2 - (5by^2)^2$

$= (4a^2x - 5by^2) \cdot (4a^2x + 5by^2)$.

Ако су чланови тринома $P + Q + S$ такви да су два од њих квадрати неких монома A, односно B, рецимо,

$$P = A^2 \quad \text{и} \quad S = B^2,$$

а трећи члан тринома (у овом случају је то Q) двоструки производ монома A и B, тј. ако је

$Q = 2 \cdot A \cdot B$, онда се тај трином може раставити на чиниоце:

$P + Q + S = A^2 + 2 \cdot A \cdot B + B^2$ (квадрат бинома)

$= (A + B)^2$

$= (A + B) \cdot (A + B)$

Чиниоци тринома $P + Q + S$ су $A + B$, што краће записујемо $(A + B)^2$.

Пример 3

1) $x^2 + 2x + 1 = x^2 + 2 \cdot 1 \cdot x + 1^2$

$= (x + 1)^2$;

2) $16a^2 + 24ab + 9b^2 = (4a)^2 + 2 \cdot 4a \cdot 3b + (3b)^2$

$= (4a + 3b)^2$;

3) $25x^2 - 40xy + 16y^2 = (5x)^2 + 2 \cdot 5x \cdot (-4y) + (-4y)^2$

$= (5x - 4y)^2$.

Трином облика $ax^2 + 2axy + ay^2$ може се раставити на чиниоце овако:

$ax^2 + 2axy + ay^2 = a \cdot (x^2 + 2xy + y^2)$ (дисстрибутивност множења

$= a \cdot (x + y)^2$ према сабирању)

- Једначину облика $ax^2 + bx = 0$, $(a \geq 0)$, користећи растављање бинома на чиниоце, можемо решити овако:

$$ax^2 + bx = 0 \text{ ако и само ако } x \cdot (ax + b) = 0$$

$$x = 0 \text{ или } ax + b = 0$$

$$x = 0 \text{ или } x = -\frac{b}{a}.$$

Скуп решења дате једначине је $\left\{0, -\frac{b}{a}\right\}$ пишемо, $x \in \left\{0, -\frac{b}{a}\right\}$.

Пример 4

На пример,

$3x^2 - 5x = 0$ ако и само ако је $x \cdot (3x - 5) = 0$

$$x = 0 \text{ или } 3x - 5 = 0$$

$$x = 0 \text{ или } x = 1\frac{2}{3}$$

$$x \in \left\{0, 1\frac{2}{3}\right\}.$$

- Видели смо да једначина $x^2 - a = 0$, за $a \geq 0$, увек има решење. ту једначину сада можемо решити и овако:

$x^2 - a = 0$ ако и само ако $x^2 - (\sqrt{a})^2 = 0$, $(a = (\sqrt{a})^2$, a $\geq 0)$.

$$(x - \sqrt{a}) \cdot (x + \sqrt{a}) = 0 \quad \text{(разлика кдвадрата)}$$

$$x - \sqrt{a} = 0 \text{ или } x + \sqrt{a} = 0$$

$$x = \sqrt{a} \text{ или } x = -\sqrt{a}.$$

Скуп решења дате једначине за $a \geq 0$ је $\{\sqrt{a}, -\sqrt{a}\}$.

Пример 5

1) $x^2 - 9 = 0$ ако и само ако је $x^2 - 3^2 = 0$

$$(x - 3) \cdot (x - 3) = 0$$

$$x - 3 = 0 \text{ или } x + 3 = 0$$

$$x = 3 \text{ или } x = -3.$$

скуп решења дате једначине је $\{3, -3\}$, тј. $x \in \{3, -3\}$.

2) $2x^2 - 24 = 0$ ако и само ако је $2 \cdot (x^2 - 12) = 0$

$x^2 - 12 = 0,\quad (12 = \sqrt{12}^2 = \sqrt{4 \cdot 3}^2 = \left(2\sqrt{3}\right)^2$

$x^2 - (2 \cdot \sqrt{3})^2 = 0$

$(x - 2\sqrt{3}) \cdot (x + 2\sqrt{3}) = 0$

$x - 2\sqrt{3} = 0$ или $x + 2\sqrt{3} = 0$

$x = 2\sqrt{3}$ или $x = -2\sqrt{3}$.

Скуп решења дате једначине је $\{2\sqrt{3}, -2\sqrt{3}\}$,

тј. $x \in \{2\sqrt{3}, -2\sqrt{3}\}$.

Задаци

1. Растави на просте чиниоце број

1) 24; 2) 108.

2. Степен запиши у облику производа:

1) x^4; 2) $(ab)^3$.

3. Моном запиши у облику производа:

1) x^2y; 2) $6a^3b^2$; 3) $15xy^2z^3$.

4. Растави на чиниоце бином:

1) $3x^2 - 6xy$; 2) $14ab - 7b^2$;

3) $5xyz + 10y^2$; 4) $18a^2b - 12abc$.

5. Растави на чиниоце разлику квадрата:

1) $x^2 - 9b^2$; 2) $4a^2 - 25$; 3) $16a^2 - 0{,}01$; 4) $6\frac{1}{4}x^2 - 36$.

6. Растави на чиниоце трином:

1) $4x^2 + 4xy + y^2$; 2) $9a^2 - 6a + 1$;

3) $14xy + x^2 + 49y^2$; 4) $\frac{1}{4} - 2x + 4x^2$.

7. Растави на чиниоце трином:

1) $ax^2 + 2ax + a$; 2) $5x^2 - 10xy + 5y^2$;

3) $7ma^2 + 28mab + 28mb^2$; 4) $18x^2z - 60xyz + 50y^2z$.

8*. Растави на чиниоце бином:

1) $25ax^2 - 16ay^2$; 2) $5xy^2 - 20xz^2$;

3) $x^2yz - xyz$; 4) $27abx^2 - 75aby^2$.

9. Реши једначину:

1) $x^2 + 7x = 0$; 2) $-2y^2 + 5y = 0$; 3) $4z^2 - 8z = 0$; 4) $5x^2 - 8x = 0$.

10. Реши једначину:

1) $x^2 - 36 = 0$; 2) $3x^2 - 27 = 0$;

3) $x^2 - 8 = 0$; 4) $7x^2 - 84 = 0$;

11. Реши једначину:

1) $x^2 + 2x = 0$; 2) $-2x^2 + 4x = 0$;

3) $-4x - x^2 = 0$; 4) $(x - 1)^2 = 4$;

5) $(1 + x)^2 - 9 = 0$.

12. За $x = -1{,}1$ израчунај вредност израза $x^2 + 2x + 1$.

13. Растави на чиниоце:

1) $3x + ax + bx$; 2) $\frac{4}{9} - y^2$; 3) $ax^2 - ax + \frac{a}{4}$

14. Израчунај вредност израза:

1) $222{,}6^2 - 221{,}6^2$;

2) $\frac{17{,}7^2 - 16{,}7^2}{4{,}3 + 7 \cdot 4{,}3}$;

3)* $\frac{23{,}48^2 + 2 \cdot 23{,}48 \cdot 26{,}52 + 26{,}52^2}{6{,}6^2 + 2 \cdot 6{,}6 \cdot 3{,}4 + 3{,}4^2}$;

15. Израчунај вредност израза $a^2 + 2ab + b^2$ за: 1) $a = 2\frac{3}{8}$ и $b = 1\frac{5}{8}$;

2) $a = 70{,}4$ и $b = 29{,}6$;

3) $a = -19$ и $b = -11$;